## 取後不放回之抽樣方法的估計方式

依據2.2.3節所示，在目標區塊中檢視到物種i所存在的區塊數，其分布應服從一個二項分佈；且第i物種出現的區塊數所組成的出現頻率向量，在在給定 的情況下，服從一超幾何分佈。又與有關，來自於，因此可推導出：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

其中，*I(A)*為指標函數，表示若出現*A*情況時，則該式為1，反之則即為0。並在此假設為一來自beta分佈的隨機樣本，故可將式子表示為：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

其中。

後隨邊際分佈可通過獲得，故：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Chiu (2022) 基於Good-Turing頻率公式與柯西不等式 (Cauchy-Schwarz inequality) 之概念，針對單一群落的估計得出近似式：，其中為出現個區塊的物種數。從中可以得知，在物種估計時，採取出現較少次的物種，可以更多提供未出現物種的資訊，有助於縮小物種豐富度的估計結果。根據等式 (4)，給出未觀測到的豐富度的期望值、唯一值和重複值：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

並將其推廣至兩群落，為兩樣本的物種豐富度正好分別為和的平均機率：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

並令為在樣本中第一群落出現次且第二群即出現次的區塊數，則為樣本中觀測到的共同物種數量，。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10) |
|  |  | (12) |
|  |  | (13) |

將 設定為1，且。成立以下近似值：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

得 ，代入 。得：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

表示：若時，則等於；若，則等於。

同理 也依此證明，得：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

表示：若時，則等於；若，則等於。

又：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

並成立以下近似值：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

將，代入 後，並加入對估計式進行調整，最終得估計式：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

其中：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

並在 (14) 中代入 。

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

表示：若時，則等於；若，則等於。

並在的基礎上，加入 對的估計進行修正，成立以下近似值：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

經由式 (12) 與 式 (17) 推得出：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

又，

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

並成立以下近似式：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

由上推得：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

又可從式 (18) = 式 (22) 得：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

並依公式解，得：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

最終得：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

其中等於 (14)、等於 (15) 且 等於 (16)，且在 (14) 中的與使用帶入 (25) 計算。

此外，在Chao and Lin (2012) 中提出兩群集的取後不放回的共同種估計方式：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

其中 與 。